

Realisierung des Alcubierre-Antriebes in einer prä-metrischen Raumzeit

[Agent Scullie]

14. April 2009

1 Einleitung

In diesem Artikel soll ein überlichtschneller Raumantrieb behandelt werden, der sich an die Idee einer Warpblase von Miguel Alcubierre anlehnt, zu dessen Realisierung jedoch eine neue Physik herangezogen werden soll. In Kapitel 2 wird zunächst dargelegt, weshalb die speziell-relativistische Raumzeit-Metrik keine überlichtschnellen Reisen zulässt, woran sich in Kapitel 3 die Darstellung der Alcubierre-Metrik anschließt, die ein Umgehen dieser Beschränkung ermöglicht. Nachdem in Kapitel 3.1 gezeigt wird, dass die Alcubierre-Metrik im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie nicht effektiv realisiert werden kann, widmet sich Kapitel 4 einer Umsetzung auf der Grundlage einer neuen Physik, die von einer prä-metrischen Raumzeit ausgeht. Kapitel 4.3 schließt mit der Betrachtung eines gequantelten Alcubierre-Antriebes.

2 Die Minkowski-Metrik

Die spezielle Relativitätstheorie beschreibt die Welt als vierdimensionale Raumzeit. Jedem Ereignis, d.h. jedem Punkt in der Raumzeit, werden vier Koordinaten (x, y, z, t) zugeordnet. Die Raumzeit hat eine Minkowski-Metrik, die raumzeitliche Abstände zwischen den Ereignissen definiert. Betrachtet man zwei benachbarte Ereignisse, deren Koordinaten sich um die Differenzen (dx, dy, dz, dt) unterscheiden (Abbildung 1), so ist der Abstand ds zwischen beiden Ereignissen festgelegt durch:

$$ds^2 = (c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Man erkennt unschwer, dass drei Fälle zu unterscheiden sind:

$$\begin{aligned} ds^2 > 0 & \quad ds \text{ zeitartig} \\ ds^2 = 0 & \quad ds \text{ lichtartig} \\ ds^2 < 0 & \quad ds \text{ raumartig} \end{aligned}$$

Auffällig ist das unterschiedliche Vorzeichen, mit dem Zeit- und Ortskoordinaten in die Metrik eingehen, man spricht hier von der Signatur $(+, -, -, -)$

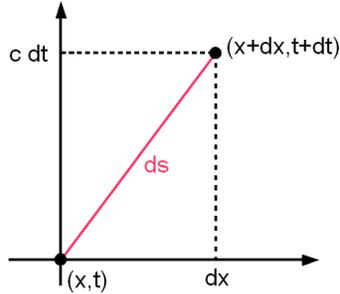


Abbildung 1: Abstand zweier Ereignisse, dy und dz sind vernachlässigt

der Raumzeit. In der Literatur ist auch die umgekehrte Signatur $(-, +, +, +)$ gebräuchlich, bei der dann das Vorzeichen von ds^2 für zeit- und raumartige Abstände vertauscht ist. Im folgenden soll aber nur die Signatur $(+, -, -, -)$ Anwendung finden. Die Ausdrücke dx, dy, \dots sind streng genommen Differentiale, d.h. infinitesimal klein. Es reicht aber, sich diese als “sehr kleine“ Größen vorzustellen.

Liegen die beiden Ereignisse auf der Weltlinie eines Teilchens, das sich mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewege, so gilt: $dy = dz = 0$, $dx = v dt$, und man erhält:

$$ds^2 = (c dt)^2 - (v dt)^2 = (c^2 - v^2) dt^2$$

Der Ereignisabstand definiert zugleich die auf der Weltlinie zwischen beiden Ereignissen verstreichende Eigenzeit $d\tau = ds/c$, was gerade auf die bekannte Formel für die Zeitdilatation führt:

$$d\tau = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} dt = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$$

Fordert man, dass eine positive, reelle Eigenzeit verstreichen soll, so folgt unmittelbar, dass ds zeitartig sein muss. Nach der Minkowski-Metrik muss dazu $v < c$ sein, bei $v > c$ würde $dx > c dt$ werden und damit $ds^2 < 0$. Deswegen ist Überlichtgeschwindigkeit in einer Raumzeit mit Minkowski-Metrik verboten. Bei $v = c$ erhält man $ds^2 = 0$, daher rührt die Bezeichnung “lichtartig“ für Nullabstände.

2.1 Der metrische Tensor

Anders als in der speziellen kann in der allgemeinen Relativitätstheorie die Raumzeit gekrümmt sein. Solche Krümmungen lassen sich durch Abweichungen der Metrik von der Minkowski-Form beschreiben. Es ist dazu zweckmäßig, die Metrik über den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ zu formulieren, der als 4×4 -Matrix

dargestellt werden kann:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ g_{xt} & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yt} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zt} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck $g_{\mu\nu}$ steht dabei sowohl für den Tensor (die Matrix) selbst als auch für jede einzelne der 16 Komponenten, in letzterem Fall sind μ, ν Indizes und laufen von 0 bis 3: $g_{00} = g_{tt}$, $g_{01} = g_{tx}$, $g_{02} = g_{ty}$, \dots , $g_{33} = g_{zz}$. Für die Komponenten gilt eine Symmetriebeziehung: $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, z.B. $g_{xt} = g_{tx}$, dadurch sind von den 16 Komponenten nur 10 voneinander unabhängig. Die Metrik kann mit dem metrischen Tensor als

$$ds^2 = g_{tt}(c dt)^2 + g_{tx} c dt dx + \dots + g_{zz} dz^2$$

geschrieben werden. Die relativistische Notation erlaubt hierfür die Kurzform:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dabei sind μ und ν in dx^μ und dx^ν keine Potenzen, sondern hochgestellte Indizes, im Unterschied zu den tiefgestellten Indizes in $g_{\mu\nu}$, es gilt: $dx^0 = c dt$, $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$, $dx^3 = dz$. Hoch- und Tiefstellung symbolisieren kontra- und kovariante Indizes, was aber im folgenden nicht weiter wichtig ist. Zudem greift hier die Einsteinsche Summenkonvention: über jeden Index, der doppelt vorkommt, einmal hoch- und einmal tiefgestellt, wird summiert. Ohne Summenkonvention würde da stehen:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Im Minkowski-Fall hat der metrische Tensor die einfache Gestalt $g_{tt} = 1$, $g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -1$ an, die Nichtdiagonalelemente mit $\mu \neq \nu$ sind alle null:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Die Alcubierre-Metrik

Es stellt sich die Frage, ob es Raumzeit-Metriken geben kann, die Überlichtgeschwindigkeiten zulassen, d.h. Metriken, in denen ds für $dx > c dt$ zeitartig bleiben kann. Eine solche Metrik wurde 1994 von Miguel Alcubierre gefunden, sie lautet:

$$ds^2 = (c dt)^2 - (dx - f(r_s)v_s dt)^2 - dy^2 - dz^2$$

Die Funktion $f(r_s)$ ist eine Formfunktion, die eine Warpblase definiert: sei

$$r_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + y^2 + z^2}$$

der Abstand vom Blasenmittelpunkt $(x_s, 0, 0)$, R der Radius der Blase und 2Δ die Dicke der Blasenwand, dann ist

$$f(r_s) = \begin{cases} 1 & r_s < R - \Delta \\ 0 < f(r_s) < 1 & R - \Delta < r_s < R + \Delta \\ 0 & r_s > R + \Delta \end{cases}$$

(Abbildung 2). Die so definierte Warpblase ist kugelförmig, es wäre im Prinzip auch jede beliebige andere Form möglich, dann wäre nur die Gestalt der Formfunktion komplizierter.

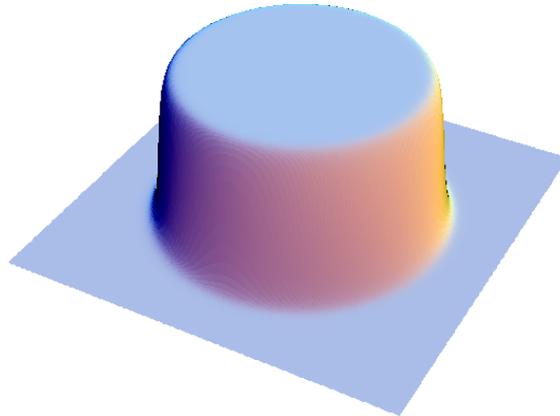


Abbildung 2: Die Warpblasen-Formfunktion

Die Blase bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_s in x -Richtung. Für ein im Blaseninneren mitgeführtes Objekt verschwindet der Term $dx - f(r_s)v_s dt$, da $dx = v_s dt$ und $f(r_s) = 1$. Da außerdem $dy = dz = 0$ ist, bleibt $ds^2 = (c dt)^2$ übrig. Die für das Objekt verstreichende Eigenzeit ergibt sich zu $d\tau = ds/c = dt$ und ist damit unabhängig von v_s reell und ohne Zeitdilatationseffekt. Daher kann v_s beliebig groß werden, auch viel größer als c . Die zurückgelegte Koordinatendifferenz dx wird gewissermaßen durch den Term $f(r_s)v_s dt$ kompensiert, so als habe sich das Objekt gar nicht bewegt, darauf gründet sich die Sprechweise, die Warpblase führe den Raum selbst mit sich mit.

Außerhalb der Blase geht mit $f(r_s) = 0$ die Metrik einfach in die Minkowski-Metrik über. Betrachtet man die Blasenwand, so zeigt sich eine Expansion des Raumes im hinteren Teil der Wand und eine Kontraktion im vorderen Teil. Man kann einen lokalen Expansionsfaktor berechnen:

$$\Theta = v_s \frac{x - x_s}{r_s} f'(r_s)$$

(Abbildung 3). Die erste Ableitung von $f(r_s)$, $f'(r_s)$, ist negativ, da $f(r_s)$ mit wachsendem r_s abnimmt. Für $x < x_s$, d.h. in der hinteren Wand, ist Θ folglich positiv, der Raum dehnt sich aus. Im vorderen Bereich dagegen ist mit $x > x_s$ der Expansionsfaktor negativ, der Raum zieht sich zusammen. Innerhalb und außerhalb der Blase ist $f'(r_s) = 0$, und damit auch der Expansionsfaktor.

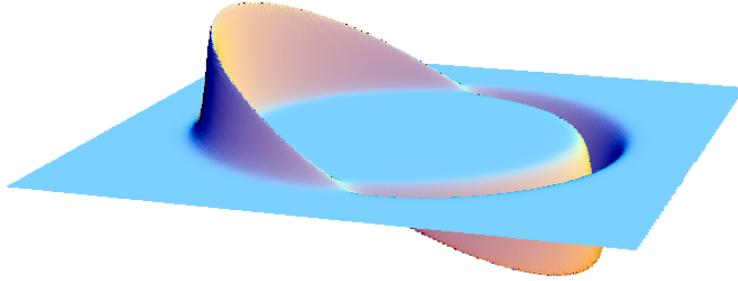


Abbildung 3: Der lokale Expansionsfaktor

Um für die Alcubierre-Metrik die Komponenten des metrischen Tensors zu bestimmen, kann man die Metrik durch Ausquadrieren des zweiten Summanden umschreiben zu

$$\begin{aligned} ds^2 &= (c dt)^2 - dx^2 + 2f(r_s)v_s dx dt - f(r_s)^2 v_s^2 dt^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= (c^2 - f(r_s)^2 v_s^2) dt^2 + 2f(r_s)v_s dx dt - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= (1 - f(r_s)^2 v_s^2 / c^2) (c dt)^2 + 2f(r_s)v_s / c dx c dt - dx^2 \\ &\quad - dy^2 - dz^2 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Komponenten:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= 1 - f(r_s)^2 v_s^2 / c^2 \\ g_{xt} &= g_{tx} = f(r_s) v_s / c \\ g_{xx} &= g_{yy} = g_{zz} = -1 \end{aligned}$$

Gegenüber der Minkowski-Metrik ist die zeitliche Komponente g_{tt} modifiziert, zudem tauchen die xt -Mischterme g_{xt} und g_{tx} auf. Interessanterweise ist der räumliche Teil des metrischen Tensors, $h_{ij} = -g_{ij}$ mit $i, j = 1, 2, 3$, unverändert:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Raum ist in der Alcubierre-Metrik folglich flach, die unter Laien verbreitete Ansicht, der Alcubierre-Antrieb krümme den Raum, ist somit definitiv falsch. Gekrümmt ist nur die Raumzeit, ausgedrückt durch die Komponenten g_{tt} , g_{xt} und g_{tx} . Noch eine Anmerkung zur relativistischen Notation: für die Indizes von raumzeitlichen Größen, die von 0 bis 3 laufen, verwendet man üblicherweise griechische Buchstaben (wie μ oder ν), für die Indizes von räumlichen Größen (1 bis 3) dagegen lateinische Buchstaben.

3.1 Der Alcubierre-Antrieb in der allgemeinen Relativitätstheorie

Will man die Alcubierre-Metrik technisch zur Realisierung eines überlichtschnellen Raumantriebes nutzen, muss man einen Weg finden, die Raumzeit-Metrik entsprechend zu manipulieren. Die allgemeine Relativitätstheorie bietet hierzu die Einsteinschen Feldgleichungen an:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$ ist der Energie-Impuls-Tensor, der die Energie- und Impuls-Verteilung beschreibt, die zum Erzeugen der gewünschten Metrik erforderlich ist, G ist die Newtonsche Gravitationskonstante. Auf der linken Seite treten neben dem schon bekannten metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ und der Ricci-Skalar R auf, die sich aus Ableitungen des metrischen Tensors zusammensetzen. Eine detaillierte Betrachtung würde hier den Rahmen sprengen, man kann aber als vereinfachte Analogie die Elektrostatik heranziehen. Dort gibt es im wesentlichen drei Größen:

- das elektrische Potential V , Differenzen in diesem sind als elektrische Spannung messbar
- die elektrische Feldstärke $\vec{E} = -\nabla V$, der Gradient des Potentials, sozusagen das Potentialgefälle. Man kann sich das so vorstellen, dass die elektrische Feldstärke stets von den Stellen wegzeigt, wo das Potential maximal ist, und zu den Stellen hin, wo es minimal wird, und betragsmäßig dort sehr groß wird, wo sich das Potential schnell ändert.
- die Divergenz der elektrischen Feldstärke $\nabla \cdot \vec{E}$, gewissermaßen ein Maß für das Erzeugen und Verschwinden von elektrischen Feldlinien

Letztere ist es, die in das Coulomb-Gesetz eingeht: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$. Demzufolge beginnen oder enden Feldlinien in Gebieten mit nichtverschwindender elektrischer Ladungsdichte ρ (z.B. elektrisch geladenen Teilchen). In Gebieten mit $\rho = 0$ ist die Zahl der Feldlinien konstant, lediglich ihre Dichte kann variieren. Die Gestalt des Coulomb-Gesetzes ist wesentlich dafür, dass das elektrische Feld einer Ladung auch im Raum außerhalb der Ladung, wo $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, vorhanden ist: würde V oder \vec{E} anstelle von $\nabla \cdot \vec{E}$ in der Gleichung stehen, wäre das Potential bzw. Feld auf den Innenraum der Ladung beschränkt, eine langreichweitige elektrische Wechselwirkung gäbe es nicht.

Das Analogon zum elektrischen Potential V ist nun der metrische Tensor. Der Ricci-Tensor ist dann mit der Divergenz der elektrischen Feldstärke vergleichbar, die Entsprechung zur elektrischen Feldstärke ist eine bislang nicht aufgetauchte Größe, das Christoffel-Symbol $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Die Feldgleichungen sind dem Coulomb-Gesetz analog, wobei der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ die Rolle der elektrischen Ladungsdichte übernimmt. Ähnlich wie beim Coulomb-Gesetz kann man begründen, dass in den Feldgleichungen der Ricci-Tensor – statt z.B. nur dem metrischen Tensor und eventuell ein paar Konstanten – auftreten muss: anderenfalls könnte es die Gravitation in der uns bekannten Form nicht geben, da das Gravitationsfeld eines gravitierenden Himmelskörpers auf dessen Innenraum beschränkt wäre.

Zur Realisierung des Alcubierre-Antriebes jedoch erweist sich die Struktur der Einsteinschen Feldgleichungen als denkbar ungünstig. Die Komponenten des Ricci-Tensors werden gerade da besonders groß, wo sich die Komponenten des metrischen Tensors schnell ändern, und das im Falle der Alcubierre-Metrik genau, wo sich die Funktion $f(r_s)$ schnell ändert: in den Wänden der Warpblase. Entsprechend müssen auch dort die Komponenten der rechten Seite der Feldgleichungen, des Energie-Impuls-Tensors, besonders groß werden. Man kann ausrechnen, dass sich für die Energiedichte

$$\rho = -\frac{c^4}{8\pi G} \frac{v_s^2(y^2 + z^2)}{4r_s^2} f'(r_s)^2$$

ergibt, wobei $f'(r_s)$ die schon genannte erste Ableitung von $f(r_s)$ ist (Abbildung

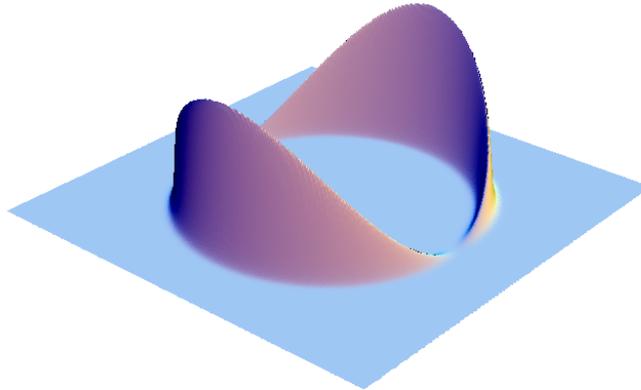


Abbildung 4: Die (negative) Energiedichte

4). Diese Energiedichte hat nicht nur die unangenehme Eigenschaft, negativ zu sein und noch dazu betragsmäßig sehr groß, sondern kann sich zudem, da sie auf die Blasenwände konzentriert ist, nicht mit der Warpblase mitbewegen, wenn deren Geschwindigkeit v_s viel größer als c ist: ein Teilchen in der Blasenwand kann

maximal mit der Geschwindigkeit $f(r_s)v_s + c$ mitgeführt werden, sofern seine Weltlinie nicht raumartig werden soll. Für $v_s \gg c$ ist daher für den größten Teil der Energie keine Mitführung möglich, und schon bei kleinen Überlichtgeschwindigkeiten hat man das Problem, dass an der vorderen Front der Blasenwand, im Bereich $x \approx x_s + R + \Delta$, die Formfunktion $f(r_s) \approx 0$ ist und die Energie daher nicht mehr mit v_s transportiert werden kann, d.h. die Vorderfront der Blase kann sich nicht so schnell bewegen wie die Blase selbst.

Man könnte es so umschreiben: die Alcubierre-Warpblase ist mit Schienen vergleichbar, über die man mit Überlichtgeschwindigkeit fahren kann, die dazu aber erst einmal mit Unterlichtgeschwindigkeit verlegt werden müssen. Effektiv ist damit keine Überlichtgeschwindigkeit erreichbar. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie ist der Alcubierre-Antrieb nicht praktikabel zu realisieren.

4 Der Alcubierre-Antrieb in einer neuen Physik

Die genannten Probleme des Alcubierre-Antriebes sind wohlgermerkt keine Probleme der Alcubierre-Metrik an sich, nur ihrer Erzeugung auf Basis der Einsteinschen Feldgleichungen. Man könnte sich eine neue Physik vorstellen, in der solche Schwierigkeiten nicht auftreten. Als Konzepte für so eine neue Physik kämen z.B. die folgenden in Frage:

- Man könnte einfach zulassen, dass sich die Energieform, mit der man die Warpblase betreibt, raumartig ausbreiten darf. Die imaginär werdende Eigenzeit könnte man dadurch umgehen, dass aus dieser Energieform eben keine Uhr gebaut werden kann. Alles, woraus man Uhren bauen kann, ist auf zeitartige Weltlinien beschränkt, und muss zum überlichtschnellen Reisen eine Warpblase benutzen.
- Man könnte sich auch vorstellen, dass die Energieform nicht-raumzeitlicher oder prä-metrischer Natur ist und Begriff wie zeitartig und raumartig für sie keine Bedeutung haben. Ist aber vom Prinzip her ähnlich zu “kann keine Uhr draus gebaut werden“.
- Man stellt sich vor, dass es einen Stapel von Parallelraumzeiten gibt, die mit unserer Raumzeit nach einem MIP-Mapping-Prinzip verknüpft sind: jeder Punkt in unserer Raumzeit hat eine Entsprechung in jeder Parallelraumzeit, dort sind jedoch die räumlichen Abstände kürzer. D.h. in der ersten Parallelraumzeit sind die Entfernungen halbiert, in der nächsten geviertelt usw. Die Energie, die eine Warpblase in unserer Raumzeit antreibt, befindet sich dann einfach in einer entsprechend tiefen Parallelraumzeit und kann daher mit der Warpblase Schritt halten ohne sich raumartig bewegen zu müssen. Den Subraum aus Star Trek könnte man auf diese Weise deuten, die verschiedenen Parallelraumzeiten entsprächen dann den Subraumschichten.
- Freunde der Idee eines höherdimensionalen Hyperraumes könnten sich statt eines diskreten Stapels von Parallelraumzeiten auch einen fünfdimen-

sionalen Hyperraum, mit einer kontinuierlichen 5. Dimension, vorstellen, von dem unsere Raumzeit ein 4D-Unterraum ist, und in dem z.B. die Lichtgeschwindigkeit von der Position in Richtung der 5. Dimension abhängig ist. Die Energie zum Betreiben einer Warpblase muss dann entsprechend tief in Richtung der 5. Dimension verschoben sein.

- Man nimmt an, dass der metrische Tensor direkt, ohne Umweg über den Ricci-Tensor, manipuliert werden kann. Dann braucht man keine Energie in den Blasenwänden, bei der man sich Gedanken machen muss, wie man sie mitführt. Dazu kann man das bereits genannte Konzept einer prä-metrischen Energie aufgreifen, in der Form, dass die Raumzeit selbst auf fundamentaler Ebene prä-metrisch ist.

Das letztgenannte Konzept soll im folgenden näher erläutert werden. Dazu ist es sinnvoll, die Alcubierre-Metrik zunächst noch etwas umzuschreiben.

4.1 Die ADM-Formulierung der Alcubierre-Metrik

Sieht man sich die Komponenten des metrischen Tensors der Alcubierre-Metrik an, machen diese einen eher unscheinbaren Eindruck. In den beiden Komponenten g_{tt} und g_{xt} kommt der Ausdruck $f(r_s)v_s/c$ vor, die beiden Komponenten sind aber unabhängig voneinander, es wäre ebensogut eine Metrik vorstellbar, in der der Ausdruck nur in einer von beiden auftritt. Es gibt jedoch eine Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie, in der sich die Gestalt der Alcubierre-Metrik auf ganz natürliche Weise ergibt: die ADM- oder 3+1-Formulierung. Ausgangspunkt ist, dass die Raumzeit in einen Stapel von raumartigen Hyperflächen Σ_t zerlegt wird, was auch Foliation genannt wird. Auf jeder dieser Hyperflächen ist die Zeitkoordinate $t = \text{const}$, d.h. so eine Hyperfläche entspricht einfach dem dreidimensionalen Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt. Der metrische Tensor zerfällt dadurch in drei Größen:

- den räumlichen metrischen Tensor h_{ij} , der die Raumgeometrie der jeweiligen Hyperfläche beschreibt: $h_{ij} = -g_{ij}$ mit $i, j = 1, 2, 3$
- den Shift-Vektor $\vec{\beta} = -(g_{xt}, g_{yt}, g_{zt})$, der die Punkte (x, y, z, t) auf einer Hyperfläche Σ_t mit den Punkten $(x, y, z, t + dt)$ auf der benachbarten Hyperfläche Σ_{t+dt} verknüpft
- die Lapse-Funktion α , die den Zeitablauf festlegt, d.h. das Voranschreiten der Eigenzeit eines Beobachters mit dem Voranschreiten der Zeitkoordinate t

Interessanterweise gilt für die Komponente g_{tt} des metrischen Tensors die Beziehung $g_{tt} = \alpha - \beta_i \beta^i$, wobei der Ausdruck $\beta_i \beta^i$ für eine flache Raumgeometrie wie im Alcubierre-Fall einfach zu

$$\beta^2 = \vec{\beta}^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$$

wird. In der Alcubierre-Metrik ist nun gerade $\alpha = 1$ und $\vec{\beta} = (-f(r_s)v_s/c, 0, 0)$. Daraus erhält man direkt die schon bekannten Komponenten

$$g_{tt} = 1 - f(r_s)^2 v_s^2 / c^2 \quad g_{xt} = f(r_s) v_s / c$$

Die Alcubierre-Metrik lässt also einfach auf eine Manipulation des Shift-Vektors zurückführen. Dies wird in Abbildung 5 deutlich: die Metrik verknüpft den Punkt (x, t) auf der Hyperfläche Σ_t (y - und z -Koordinate seien vernachlässigt) mit einem Punkt $(x + dx, t + dt)$ auf der Hyperfläche Σ_{t+dt} , so dass den beiden Punkten der Abstand $ds = c dt$ zugeordnet wird. Im Minkowski-Fall ist das einfach der Punkt $(x, t + dt)$, d.h. $dx = 0$. Im Alcubierre-Fall dagegen ist es innerhalb der Warpblase mit $f(r_s) = 1$ der Punkt $(x + v_s dt, t + dt)$. Der Shift-Vektor $\vec{\beta}$ ist dann ein Vektor auf der Hyperfläche Σ_{t+dt} , der von dem zugeordneten Punkt $(x + dx, t + dt)$ zum Punkt $(x, t + dt)$ zeigt.

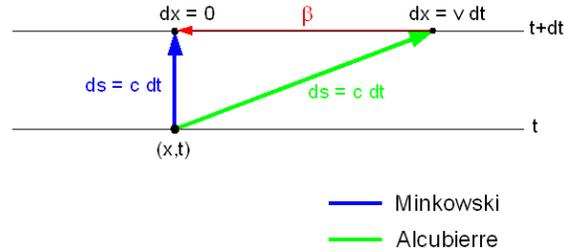


Abbildung 5: Alcubierre vs. Minkowski

4.2 Der Alcubierre-Antrieb in einer prä-metrischen Raumzeit

Die Grundlagen sind damit erarbeitet. Um ein Raumschiff auf eine Geschwindigkeit $v_s > c$ zu beschleunigen, stellt man in einem Raumgebiet um das Schiff herum (der Warpblase) die Komponente β_x des Shift-Vektors in Flugrichtung auf den gewünschten Wert $\beta_x = -v_s$ ein. Eine Physik, die dies gestattet, könnte z.B. auf einer Gleichung der Form $\vec{\beta} \propto \vec{w}$ aufbauen, wobei \vec{w} ein Warpfeld ist. So eine Physik führt jedoch zu einem ganz anderen Raumzeit-Bild als dem der Relativitätstheorie.

Im relativistischen Bild kann die Raumzeit, auch wenn sie gekrümmt ist, auf einer hinreichend kleinen Skala stets als flach, und damit als von einer global flachen Raumzeit ununterscheidbar behandelt werden. Der metrische Tensor kann lokal stets durch eine geeignete Koordinatentransformation auf Minkowski-Form gebracht werden, physikalische Bedeutung hat weniger er selbst als eher nur seine Änderungen. Dies passt mit dem schon genannten Analogon des elektrischen Potentials in der Elektrostatik zusammen: man kann Änderungen des Potentials als elektrische Feldstärke messen, nicht aber das Potential selbst. Man kann dem

Potential überall im Raum einen Betrag V_0 hinzuaddieren, ohne dass es messbare Auswirkungen hätte. Man bezeichnet dies als globale $U(1)$ -Eichinvarianz der elektromagnetischen Wechselwirkung.

In diesem Bild ist der Innenraum der Alcubierre-Warpblase eine wenig interessante Raumzeit-Region. Die Raumzeit ist dort flach, und nicht von der Minkowski-Raumzeit außerhalb der Blase zu unterscheiden. Alles interessante spielt sich in der Blasenwand ab, nur in dieser ist die Raumzeit gekrümmt (wie sich über eine weitere bislang nicht behandelte Größe, den Riemannschen Krümmungstensor $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$, berechnen lässt), nur dort läuft die Expansion und Kontraktion des Raumes an, von der die Blase vorwärts getrieben wird. Es verwundert daher nicht, dass den Feldgleichungen zufolge die zum Aufrechterhalten der Blase nötige Energieverteilung auf die Blasenwand konzentriert sein muss.

Eine Physik, die es erlaubt, den Shift-Vektor im Blaseninneren direkt zu manipulieren, muss dieses Bild zwangsläufig umstoßen. Der metrische Tensor selbst erhält physikalische Bedeutung, an der Raumzeit im Blaseninneren muss etwas anders sein als an der Raumzeit außerhalb. Das Verhalten des Raumes in der Blasenwand ist nicht mehr treibende Kraft, sondern erweist sich Nebeneffekt der Raumzeit-Manipulation innerhalb der Blase. Als Resultat ergibt sich ein grundlegend anderes Verständnis von der Raumzeit:

Die Metrik ist keine primordiale Eigenschaft der Raumzeit. Auf der untersten Ebene der Realität ist die Raumzeit kein metrischer Raum, nur ein topologischer, jeder Punkt der Raumzeit hat eine Position in Relation zu allen anderen Punkten, aber keine a priori festgelegten Abstände ds zu seinen Nachbarpunkten. Der ‘‘Baustoff‘‘ der Raumzeit ist prä-metrisch. Die Metrik ist lediglich eine Zuordnungsfunktion, die jedem Punkt einer Hyperfläche Σ_t einen Punkt der Nachbar-Hyperfläche Σ_{t+dt} zuweist und bestimmt, dass die beiden Punkte den Abstand $c dt$ haben. Man kann die Metrik mit z.B. einem elektrischen Feld vergleichen, das eine bestimmte Feldstärke \vec{E} hat, die aber nicht vorbestimmt ist und daher geändert werden kann. In unserem Universum hat sich als Standardmetrik die Minkowski-Metrik $\vec{\beta} = 0$ herauskristallisiert. Es ist jedoch möglich, innerhalb einer begrenzten Raumregion die Metrik auf einen anderen Shift-Vektor umzustellen, z.B. auf $\vec{\beta} = (-v_s, 0, 0)$. Dadurch erzeugt man eine Warpblase, die sich mit v_s vorwärts bewegt.

4.3 Der gequantelte Alcubierre-Antrieb

Eine interessante Erweiterung des Konzepts erhält man, wenn man festlegt, dass der Shift-Vektor nicht beliebig sein kann, sondern für den Betrag

$$\beta = |\vec{\beta}| = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}$$

nur ganzzahlige Vielfache von $2c$ zugelassen sind: $\beta = 0, 2c, 4c, \dots$. Dann können sich Warpblasen ebenfalls nur mit ganzzahligen Vielfachen von $2c$ bewegen. Ein in einer Warpblase, die mit $v_s = 2c$ in positive x -Richtung reist, in negative x -Richtung emittierter Lichtstrahl hat die gleiche Geschwindigkeit $dx/dt = v_s - c = c$ wie ein außerhalb der Blase in positive x -Richtung emittierter Lichtstrahl.

Ebenso hat ein in einer mit $v_s = 4c$ reisenden Warpblase in negative x -Richtung ausgesandter Lichtstrahl die gleiche Geschwindigkeit $v_s - c = 3c$ wie ein Strahl, der in einer mit $v_s = 2c$ reisenden Blase in positive x -Richtung emittiert wird. Oder allgemein: ein in einer Warpblase entgegengesetzt zur Flugrichtung ausgesandter Lichtstrahl hat die gleiche Geschwindigkeit wie einer, der in einer Blase mit der nächstniedrigeren Geschwindigkeit in Flugrichtung ausgesandt wird.

Dies führt auf ein Symmetrieprinzip: während in der speziellen Relativitätstheorie der Bereich der zulässigen Geschwindigkeit auf das Intervall $[-c, c]$ beschränkt ist, ergibt sich hier eine ganze Folge vergleichbarer Intervalle

$$[-c, c], [c, 3c], [3c, 5c], \dots, \quad \text{allgemein: } [(2n - 1)c, (2n + 1)c]$$

wobei $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ eine Art “Warp-Quantenzahl“ ist. Die ungeradzahigen Vielfachen von c sind dann die Polstellen des Zeitdilationsfaktors, an denen keine Eigenzeit verstreicht, die geradzahigen Vielfachen $2nc$ die Minima, an denen die verstreichende Eigenzeit $d\tau = dt$ ist. Eine solche “Quantelung“ des Shift-Vektors lässt sich z.B. auf ein $2c$ -periodisches Potential

$$V(\beta) \propto \sin^2(\pi c/2)$$

zurückführen, dessen lokale Minima bei $2nc$ liegen (Abbildung 6). Der Shift-

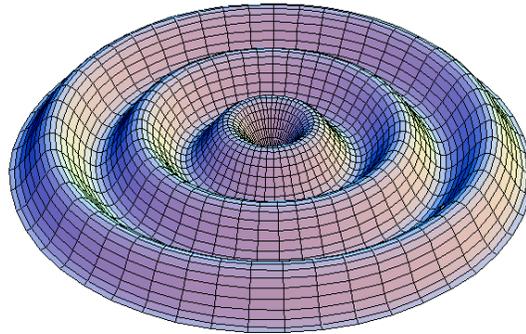


Abbildung 6: Das Potential $V(\beta)$

Vektor stellt sich demnach vorzugsweise auf solche Werte ein, bei denen das Potential minimal wird. Man erhält auf diese Weise eine natürliche Skala für Warpfaktoren – eben die Geschwindigkeiten $2nc$ – die freilich überhaupt nicht mit den Warpskalen als Star Trek zusammenpasst.

In den Wänden einer Warpblase wird das Quantelungsprinzip allerdings zwangsläufig verletzt. Da sich die Funktion $f(r_s)$ dort kontinuierlich ändert,

ändert sich auch der Shift-Vektor kontinuierlich, sofern die Blasenwand eine endliche Dicke $2\Delta > 0$ hat. Damit das nicht zu einem Problem wird, kann man einfach zulassen, dass in Übergangszonen zwischen Raumbereichen mit unterschiedlicher Quantenzahl n auch andere Werte für β erlaubt sind als $2nc$, sofern die Dicke einer solchen Übergangszone hinreichend klein ist gegenüber dem Radius des umschlossenen Raumbereiches. Die Quantelung von β im Warpblaseninneren liefert auch eine elegante Erklärung, warum dort keine geringfügigen Schwankungen des Shift-Vektors, d.h. der Geschwindigkeit v_s , auftreten, die ein Raumschiff leicht zerreißen könnten: für eine Schwankung müsste die nächsthöhere oder nächstniedrigere Quantenzahl n erreicht werden, was nicht so einfach spontan passiert.