1 Spiralwellen und Polarisation

1.1 skalare Wellen

Betrachten wir als einfachsten Fall skalare Wellen. Da skalare Größen keine Richtung haben, gibt es keine Polarisationsrichtung und somit keine Polarisation. Ein Beispiel für eine skalare Welle ist eine Druckwelle. Im Fall einer Kreiswelle in der Äquatorebene der Quelle gilt für die Auslenkung $A(r, \phi, t)$ der Welle im Abstand r am Azimutwinkel ϕ zur Zeit t:

$$A(r, \phi, t) = \frac{A_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl ist und $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz. λ und ν sind die Wellenlänge und die Frequenz. Die Welle breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit $\lambda \cdot \nu = c$ aus. Da die Welle skalar ist, ist die Auslenkung A ein Skalar, bei einer Druckwelle z.B. der Druck p. A_0 ist eine Konstante, der Ausdruck A_0/r ist die Amplitude der Welle im Abstand r.

Um statt der Kreiswelle eine Spiralwelle zu erhalten, muss die Phase, d.h. das Argument des cos-Funktion vom Azimutwinkel ϕ abhängen. Der einfachste Fall ist:

$$kr - \omega t \quad \rightarrow \quad kr - \omega t + \phi$$

Für die Auslenkung gilt dann:

$$A(r, \phi, t) = \frac{A_0}{r} \cos(kr - \omega t + \phi)$$

Die Linien konstanter Phase zu einer festen Zeit t sind dann keine Kreise mehr, sondern durch die Abhängigkeit vom Azimutwinkel ϕ Spiralen, wie es bei einer Spiralwelle sein soll:

$$kr - \omega t + \phi = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad r = r(\phi) = \frac{\text{const.} + \omega t - \phi}{k}$$

Daran, dass eine skalare Welle eine Spiralwelle sein kann, kann man bereits erahnen, dass die Spiralform einer Welle nicht mit der Polarisation zusammenhängt. Aber machen wir weiter...

1.2 vektorielle Wellen (EM-Wellen)

Der nächste Schritt sind vektorielle Wellen. Ein Beispiel hierführ sind EM-Wellen, bei denen der elektrische Feldstärkevektor $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ die Rolle der Auslenkung übernimmt. Da die Auslenkung ein Vektor ist, gibt es jetzt eine Polarisationsrichtung (die Richtung, in die der Vektor zeigt). Bei linearer Polarisation ist die Richtung des Vektors an einem beliebig gewählten Punkt im Raum zeitlich konstant, bei elliptischer oder zirkularer Polarisation ändert sie sich periodisch mit der Zeit. Betrachten wir den Fall linearer Polarisation in z-Richtung, senkrecht zur Äquatorebene der Quelle:

$$\mathbf{E} = (0, 0, E) = E\mathbf{e}_z$$

$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung. Da $\mathbf{E}$ keine x- und y-Komponente hat, haben wir die z-Komponente von E_z in E umbenannt. Es gilt dann im Falle einer Kreiswelle für die elektrische Feldstärke im Abstand r am Azimutwinkel ϕ zur Zeit t:

$$\mathbf{E}(r, \phi, t) = \frac{E_0 \mathbf{e}_z}{r} \cos(kr - \omega t)$$

und entsprechend für eine Spiralwelle:

$$\mathbf{E}(r, \phi, t) = \frac{E_0 \mathbf{e}_z}{r} \cos(kr - \omega t + \phi)$$

Man erkennt daran, dass bei einer vektoriellen Welle die Spiralform völlig unabhängig von der Polarisation ist. Nichts hindert eine Spiralwelle daran, linear (hier in z-Richtung) polarisiert zu sein. Aber machen wir weiter…

1.3 tensorielle Wellen (Gravitationswellen)

Bei Gravitationswellen wird in der allgemeinen Relativitätstheorie die Rolle der Auslenkung von der Abweichung des metrischen Tensors $g^{\mu\nu}$ von der Minkowski-Form $\eta^{\mu\nu}$ übernommen. Mit

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$$

ist $h^{\mu\nu}$ die Auslenkung. $h^{\mu\nu}$ kann als 4×4-Matrix dargestellt werden, die in der Äquatorebene der Quelle in Zylinderkoordinaten (t, r, ϕ, z) folgendermaßen aussieht:

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix}$$

Da Gravitationswellen stets transversal polarisiert sind, verschwinden alle Komponenten außer $h^{\phi\phi} = h_+$, $h^{zz} = -h_+$, und $h^{\phi z} = h^{z\phi} = h_\times$. h_+ steht für lineare Polarisation: für $h_+ > 0$ werden Abstände in ϕ-Richtung, d.h. azimutale Abstände, vergrößert und Abstände in z-Richtung verkleinert, für $h_+ < 0$ ist es umgekehrt.

Beschränken wir uns nun wieder auf den Fall linearer Polarisation, indem wir $h_\times = 0$ setzen. Wir definieren die Matrix

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

so dass die Auslenkung $h^{\mu\nu}$ geschrieben werden kann als

$$h^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} h_+$$

Setzen wir für h_+ eine Kreiswelle ein:

$$h_+(r, \phi, t) = \frac{h_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

so erhalten wir für die Auslenkung

$$h^{\mu\nu}(r, \phi, t) = \frac{M^{\mu\nu} h_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

und im Falle einer Spiralwelle entsprechend

$$h^{\mu\nu}(r, \phi, t) = \frac{M^{\mu\nu} h_0}{r} \cos(kr - \omega t + \phi)$$

Man erkennt wieder, dass Polarisation und Spiralform völlig unabhängig voneiander sind. Die Spiralform der Welle steht der linearen Polarisation in keinster Weise entgegen. Anders als bei der vektoriellen Welle gibt es lediglich keine eindeutige Polarisationsrichtung, da abwechselnd eine Ausdehnung in z- und in ϕ-Richtung stattfindet, beide Richtungen mithin gleichermaßen Polarisationsrichtungen sind.