Beginnen wir allgemein mit einer punktförmigen Testmasse m, die sich in der Nähe eines ausgedehnten Körpers M befindet. M besitzt nun ein Potential, dass sich mit Hilfe der Testmasse m folgendermaßen beschreiben lässt:

$$dE_p = -G \cdot \frac{m\,dM}{r}$$

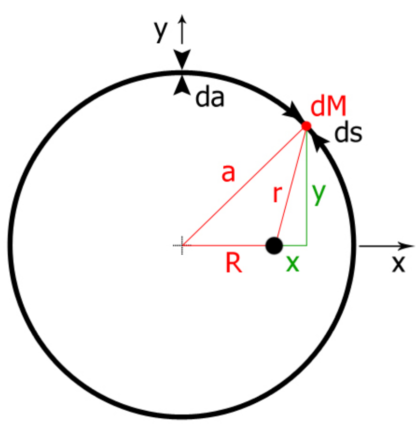
Hierin sind $G$ die Gravitationskonstante, m die Testmasse, dM das Teilelement des ausgedehnten Körpers und r der Abstand zwischen m und dM. Für die Kraft, die zwischen m und M wirkt gilt nun:

$$\mathbf{F_g} = \nabla E_p$$

Wobei $\nabla$ der Nabla-Operator ist, ein Vektoroperator, dessen Komponenten sich aus den Ableitungen nach den einzelnen Abständen zusammensetzt.

$$\nabla \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun konkret das vorliegende Problem eines geradlinigen Tunnels durch die Erde. Wir vereinfachen das Problem auf einen Zylinder der Masse M und der Höhe h:




$dM$ ist wieder unser Teilelement und $r$ der Abstand zwischen der Testmasse und dem Teilelement. $a$ ist der Radius des Zylinders, $R$ der Abstand zwischen der Testmasse und dem Zylindermittelpunkt. $x$ und $y$ sind die Projektionen von $r$ auf die x- und y-Achse. $da$ ist die Dicke eines Teilzylinderrings. Am Ende müsste man über alle Zylinderringe aufsummieren. $ds$ ist die Breite eines Teilelements.

Wie können wir nun ein Teilelement beschreiben? Gehen wir davon aus, dass der Körper homogen ist und eine Dichte $\rho$ besitzt. Der Zylinder erstreckt sich nun über eine Höhe h und das Teilelement ist $da$ dick und $ds$ breit. Daher ist das Volumen gegeben durch $h\ da\ ds$ und damit:

$$dM = \rho h \cdot ds\ da$$

Betrachten wir die Skizze genauer und versuchen wir $dM$ durch die x-Koordinate auszudrücken. Die Projektion von $ds$ auf die x-Achse sei $dx$ und es gilt $dx = ds/\pi$ (dies lässt sich durch eine Integration über den Kreis plausibel machen). Damit wird $dM$ zu:

$$dM = \pi \cdot \rho h \cdot dx\ da$$

Setzen wir das in unsere Formel für das Potential ein:

$$E_p = -\pi \rho G h m\ da \int\limits_{-a}^{+a} \frac{dx}{r}$$

Um die Integration durchzuführen, müssen wir die x-Abhängigkeit von $r$ untersuchen:

$$\begin{aligned}
r^2 &= x^2 + y^2 \\
y^2 &= a^2 - (R + x)^2 \\
r^2 &= x^2 + a^2 - R^2 - x^2 - 2Rx \\
r &= \sqrt{a^2 - R^2 - 2Rx} \\
\\
\frac{dr}{dx} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2R}{\underbrace{\sqrt{a^2 - R^2 - 2Rx}}_{\equiv r}} \\
&= -\frac{2R}{r} \\
r\ dr &= -R\ dx
\end{aligned}$$

Mit dieser Substitution ändern sich die Integrationsgrenzen zu: $-a \rightarrow a + R$, $+a \rightarrow a - R$ und das Integral wird:

$$\begin{aligned}
E_p &= -\frac{\pi \rho G h m\ da}{R} \int\limits_{a+R}^{a-R} dr \\
&= -\frac{\pi \rho G h m\ da}{R} (\underbrace{a - R - a - R}_{-2R}) \\
&= 2\pi \rho G h m\ da
\end{aligned}$$

Da $M = 2\pi\rho ha\ da$ ist, gilt
$$E_p = G\frac{m \cdot M}{a}$$
In dieser Gleichung sind auf der rechten Seite nur Konstanten, denn die einzige Veränderliche $R$ hat sich herausgekürzt. Folgerichtig ist das Potential innerhalb des Zylinders konstant, egal wie breit der Zylinder ist. Da $E_p$ konstant und daher von $x, y, z$ nicht abhängt, gilt:
$$\mathbf{F}_g = \nabla E_p = 0$$
$$R < a$$
Damit wurde gezeigt, dass ein Körper innerhalb eines Zylinders keine Kraft erfährt.