

# Vakuumschwankungen des elektromagnetischen Feldes

27. September 2016

## 1 Einleitung

In der populärwissenschaftlichen Literatur liest man häufig, dass bei Vakuumschwankungen ständig virtuelle Teilchen – im Fall des elektromagnetischen Feldes Photonen – entstünden und wieder verschwinden, und sich dafür jedes Mal Energie "ausborgen" würden, was durch die Unschärferbeziehung zwischen Energie und Zeit ermöglicht würde. Oftmals wird dann auch der Casimir-Effekt angeführt, der dadurch zustandekäme, dass zwei Metallplatten durch das Auftreffen der virtuellen Teilchen zusammengedrückt würden. In Lehrbüchern zur Quantenfeldtheorie, wie z.B. [1] oder [2], ist von solchen Darstellungen jedoch nichts zu finden. Vakuumschwankungen ebenso wie der Casimir-Effekt werden da auf ganz andere Weise beschrieben.

Deswegen soll im folgenden auf der Grundlage von [1] die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes erläutert werden, wobei in Abschnitt 2 zunächst kurz das klassische Feld behandelt und in Abschnitt 3 dann näher auf das quantisierte Feld eingegangen werden soll. U.a. wird dabei auch der Casimir-Effekt betrachtet (Abschnitt 3.4). Im letzten Abschnitt 4 sollen darauf aufbauend dann noch einmal die Darstellungen aus der populärwissenschaftlichen Literatur diskutiert werden.

## 2 Das klassische Feld in einem Kasten

In den Kapiteln 3.2 und 3.3 von [1] wird zunächst das klassische elektromagnetische Strahlungsfeld in einem würfelförmigen Kasten der Kantenlänge  $L$  und dem Volumen  $V = L^3$  betrachtet. Die Wände des Kastens werden als ideal elektrisch leitend angenommen, was zur Folge hat, dass die elektrische Feldstärke an einer Wand entweder senkrecht zur Wand stehen oder verschwinden muss. Dadurch werden nur bestimmte Moden des Feldes zugelassen, für die die Bedingung

$$k_r = \frac{2\pi}{\lambda_r} = r \frac{\pi}{L}, \quad \omega_r = ck_r = r \frac{\pi c}{L}$$

(Gleichung 3.2.4b) erfüllt ist. Dabei ist  $r = 1, 2, 3, \dots$  der Index der Mode,  $\lambda_r$  die Wellenlänge,  $k_r = 2\pi/\lambda_r$  die sog. Wellenzahl und  $\omega_r$  die Kreisfrequenz. Die zu

der  $r$ -ten Mode gehörende elektrische Feldstärke  $E_r$  und magnetische Feldstärke  $B_r$  können als

$$E_r = -C_r \sin(k_r x) q_r \quad B_r = -\frac{C_r}{\omega_r c} \cos(k_r x) \dot{q}_r$$

(3.3.6) geschrieben werden, mit

$$q_r = \cos(\omega_r t), \quad \dot{q}_r = \frac{dq_r}{dt} = -\omega_r \sin(\omega_r t)$$

Die sog. *Feldveränderliche*  $q_r$  beschreibt eine zeitliche Schwingung analog der Schwingung eines harmonischen Oszillators, dadurch kann die betrachtete Mode wie ein harmonischer Oszillator behandelt werden.  $C_r$  ist die Amplitude der Schwingung, die in der klassischen Theorie analog zur Schwingungsamplitude eines klassischen harmonischen Oszillators beliebige Werte annehmen kann. Definiert man die Größen

$$m_r = \frac{\epsilon_0 C_r^2 V}{2\omega_r} \quad \Leftrightarrow \quad C_r = \sqrt{\frac{2m_r \omega_r^2}{\epsilon_0 V}}$$

und

$$p_r = m_r \dot{q}_r$$

so kann man die Energie der  $r$ -ten Mode – also den Beitrag der Mode zur Gesamtenergie des Feldes – in der Form

$$W_r = \frac{p_r^2}{2m_r} + \frac{1}{2} m_r \omega_r^2 q_r^2$$

schreiben (3.3.8), was gerade der Energie eines harmonischen Oszillators sehr ähnlich ist – siehe Kapitel 1.2 in [1] – wenn man die Auslenkung  $x$  durch die Feldveränderliche  $q_r$  ersetzt. Die Größe  $m_r$  übernimmt dabei die Rolle der Masse. Die Beiträge zur elektrischen und magnetischen Feldstärke kann man schließlich als

$$E_r = -\sqrt{\frac{2m_r \omega_r^2}{\epsilon_0 V}} \sin(k_r x) q_r \quad B_r = -\sqrt{\frac{2}{m_r c^2 \epsilon_0 V}} \cos(k_r x) p_r$$

schreiben (3.3.9). Zu beachten ist, dass  $E_r$  hier durch  $q_r$  und  $B_r$  durch  $p_r$  ausgedrückt ist.

Die Analogie zum harmonischen Oszillators ist es, die den Schlüssel zur Quantisierung des Strahlungsfeldes bildet.

## 2.1 Zur "Masse" $m_r$

Die Größe  $m_r$ , die eine ähnliche Rolle spielen soll wie beim harmonischen Oszillator die Masse, hängt von der Amplitude  $C_r$  ab, was etwas merkwürdig anmutet,

da beim harmonischen Oszillator die Masse natürlich unabhängig von der Schwingungsamplitude ist. Hier muss man berücksichtigen, dass die Feldveränderliche  $q_r = \cos(\omega t)$  so definiert ist, dass sie auf das Intervall  $[-1, 1]$  beschränkt ist, im Unterschied zur Auslenkung  $x$  beim harmonischen Oszillator, die unbeschränkt ist. Die zur Auslenkung korrespondierende Größe wäre daher eher  $C_r \cos(\omega t)$  statt  $\cos(\omega t)$ . Nehmen wir im folgenden an, wir würden  $q_r$  durch

$$q_r = C_r \cos(\omega t)$$

definieren. Dann wäre

$$\dot{q}_r = \frac{dq_r}{dt} = -C_r \omega_r \sin(\omega_r t)$$

und entsprechend

$$E_r = -\sin(k_r x) q_r \quad B_r = -\frac{1}{\omega_r c} \cos(k_r x) \dot{q}_r$$

Für  $m_r$  würde sich dann die Definition

$$m_r = \frac{\epsilon_0 V}{2\omega_r}$$

anbieten, was von  $C_r$  unabhängig ist. Für die Energie ergäbe sich, in Analogie zu (3.3.7)

$$W_r = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 V}{\omega_r} \left( \frac{1}{2} \omega_r^2 q_r^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_r^2 \right) = \frac{p_r^2}{2m_r} + \frac{1}{2} m_r \omega_r^2 q_r^2$$

was wieder dem Ausdruck (3.3.8) entspricht. Dieser alternative Ansatz würde also im wesentlichen zum gleichen Ergebnis führen.

### 3 Das quantisierte Feld

Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes wird in [1] in den Kapiteln 4.1 und 4.2 dargestellt. Die Moden des Feldes werden einzeln nach dem Vorbild eines harmonischen Oszillators quantisiert. Für eine ausführliche Darstellung der Quantisierung des harmonischen Oszillators sei auf Kapitel 2.4ff in [1] oder auf [3] verwiesen, hier seien nur die wichtigsten Eckdaten genannt.

#### 3.1 Der quantenmechanische harmonische Oszillator

Allgemein gilt beim Schritt von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik, dass der Aufenthaltsort  $x$  und der Impuls  $p$  eines Teilchens durch Operatoren ersetzt werden:

$$x \rightarrow \hat{x} = x, \quad p \rightarrow \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

die auf eine Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  wirken. Die Wellenfunktion kann im Fall einer Energieeigenfunktion, also einer Funktion mit scharfer Energie, in einen zeitlichen Teil  $\exp(-i\omega_n t)$  und einen räumlichen Teil  $u_n(x)$  aufgespalten werden:

$$\Psi_n(x, t) = u_n(x) \exp(-i\omega_n t)$$

(2.2.6). Der Index  $n$  nummeriert dabei die möglichen Energieeigenzustände durch. Beim harmonischen Oszillator gilt für die möglichen räumlichen Anteile der Wellenfunktion

$$u_n = \sqrt{\frac{\kappa}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) H_n(\xi)$$

(2.4.4), mit

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad \kappa = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

und  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$   $H_n(\xi)$  sind die sog. Hermite-Polynome. Für die Energie gilt

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

(2.4.3). Im Hinblick darauf, dass wir beim elektromagnetischen Feld den Vakuumzustand betrachten wollen, ist es nützlich, sich den Zustand  $n = 0$ , den Grundzustand, näher anzusehen. Die Wellenfunktion wird dann zu

$$u_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2\right)$$

d.h. zu einer einfachen Gaußfunktion mit der Breite  $\sqrt{\hbar/m\omega}$ . Die Energie des Oszillators ist dabei  $W_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Das kann man so verstehen, dass im klassischen Grundzustand die Energie des harmonischen Oszillators den Wert  $W = 0$  annimmt und die Auslenkung konstant bei  $x = 0$  liegt, während im quantenmechanischen Grundzustand die Energie  $W_0 > 0$  ist und Nullpunktschwingungen mit der Amplitude  $\delta x = \sqrt{\hbar/m\omega}$  auftreten.

### 3.2 Quantisierung des Feldes

In Analogie zu den Größen  $x$  und  $p$  in der Quantenmechanik werden bei der Quantisierung der  $r$ -ten Mode des Feldes die Größen  $q_r$  und  $p_r$  zu Operatoren

$$q_r \rightarrow \hat{q}_r = q_r, \quad p_r \rightarrow \hat{p}_r = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_r}$$

An die Stelle einer Wellenfunktion mit dem Ort  $x$  als Parameter tritt eine Wellenfunktion mit der Feldveränderlichen  $q_r$  als Parameter:

$$\Psi_{n_r}(q_r, t) = u_{n_r}(q_r) \exp(-i\omega_{n_r} t)$$

Zu beachten ist, dass hier der die Energieeigenzustände durchnummerierenden Index  $n_r$  selbst einen Index  $r$  trägt, der die Mode des Feldes angibt. Die Feldstärken  $E_r$  und  $B_r$  werden dadurch, dass sie von den zu Operatoren werdenden Größen  $q_r$  und  $p_r$  abhängen, ebenfalls zu Operatoren:

$$E_r \rightarrow \hat{E}_r = -\sqrt{\frac{2m_r\omega_r^2}{\epsilon_0 V}} \sin(k_r x) q_r$$

$$B_r \rightarrow \hat{B}_r = -\sqrt{\frac{2}{m_r c^2 \epsilon_0 V}} \cos(k_r x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_r}$$

(4.2.2a und 4.2.2b). Für die Wellenfunktion  $u_{n_r}(q_r)$  gilt nun analog zu den möglichen Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators:

$$u_{n_r} = \sqrt{\frac{\kappa}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \kappa_r^2 q_r^2\right) H_n(\kappa_r q_r)$$

(4.2.5), mit

$$\kappa_r = \sqrt{\frac{m_r \omega_r}{\hbar}}$$

Die möglichen Werte für die Energie der Mode sind

$$W_{n_r} = \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_r$$

(4.2.6). Ähnlich dem Index  $n$  beim harmonischen Oszillator ist der Index  $n_r$  eine Art "Anregungsgrad" der Mode. Diesen Anregungsgrad identifiziert man in der Quantenfeldtheorie mit der Anzahl an Photonen, also Quanten des elektromagnetischen Feldes: im Zustand  $n_r = 0$  sind keine Photonen der  $r$ -ten Mode vorhanden, im Zustand  $n_r = 1$  ist ein Photon vorhanden, im Zustand  $n_r = 2$  zwei Photonen usw. Da bei jeder Erhöhung von  $n_r$  um 1 die Energie um  $\hbar\omega_r$  zunimmt, kommt damit jedem Photon die Energie  $\hbar\omega_r$  zu.

Die Wellenfunktion  $u_{n_r}(q_r)$  kann folgendermaßen verstanden werden. In der Quantenmechanik gibt das Betragsquadrat  $|u_n(x)|^2$  die Wahrscheinlichkeitsdichte an, das betrachtete Teilchen am Ort  $x$  vorzufinden. Analog gibt in der Quantenfeldtheorie das Betragsquadrat  $|u_{n_r}(q_r)|^2$  die Wahrscheinlichkeit an, für die Feldverändliche den Wert  $q_r$  bzw. für das elektrische Feld  $E_r$  die Feldkonfiguration

$$-\sqrt{\frac{2m_r\omega_r^2}{\epsilon_0 V}} \sin(k_r x) q_r$$

vorzufinden. Man könnte die Wellenfunktion  $u_{n_r}(q_r)$  auch als Wellenfunktional  $u_{n_r}[E_r(x)]$  auf dem Raum der Feldkonfigurationen schreiben. Eine Darstellung der Wellenfunktion  $u_{n_r}$  findet sich in Bild 4.1 in [1] für  $n_r = 0$ ,  $n_r = 1$  und  $n_r = 2$  (siehe Anhang A).

Analog zur Unschärferelation zwischen Ort und Impuls ergibt sich beim quantisierten Feld eine Unschärfebeziehung zwischen  $q_r$  und  $p_r$ , und daraus entsprechend eine Unschärfebeziehung zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld:

$$\delta E_r \delta B_r = \frac{\hbar \omega_r}{c \epsilon_0 V} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin(2k_r x)$$

(4.2.15). Außer an den Wellenknoten, also den Punkten  $x$ , wo  $\sin(k_r x) = 0$  ist, können  $E_r$  und  $B_r$  somit nicht gleichzeitig scharfe Werte annehmen.

Anmerkung: in vielen Lehrbüchern zur Quantenfeldtheorie, so auch in [1], wird beim harmonischen Oszillator der Formalismus der Auf- und Absteigeoperatoren verwendet, und analog bei der Feldquantisierung der Formalismus der Erzeuge- und Vernichteoperatoren für die zum jeweiligen Feld gehörenden Teilchen (Feldquanten), beim elektromagnetischen Feld Photonen. Dieser Formalismus wird hier nicht benötigt und soll daher hier nicht näher erläutert werden. Darüberhinaus wird in vielen Lehrbüchern, wie z.B. in [2], bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes anstelle der elektrischen und magnetischen Feldstärke das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  betrachtet, mit dem das elektrische und magnetische Feld gemäß

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

zusammenhängt, wobei  $\phi$  das Skalarpotential ist, das selbst nicht quantisiert zu werden braucht, weil es vollständig durch die elektrischen Ladungsdichte bestimmt ist und daher keinen eigenen dynamischen Freiheitsgrad des Feldes darstellt.

### 3.3 Der Vakuumzustand

Wir wollen nun den Vakuumzustand des elektromagnetischen Feldes betrachten, also den Zustand, in dem für alle Moden  $n_r = 0$  ist und somit keine Photonen vorhanden sind. Die Wellenfunktion  $u_{n_r}(q_r)$  (4.2.5) der  $r$ -ten Mode ist dann

$$u_{r0} := u_{n_r}|_{n_r=0} = \left( \frac{m_r \omega_r}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp\left( -\frac{1}{2} \frac{m_r \omega_r}{\hbar} q_r^2 \right)$$

(Anmerkung: die etwas umständliche Schreibweise für  $u_{r0}$  hängt damit zusammen, dass es inkonsistent wäre, wegen  $n_r = 0$  einfach  $u_0$  zu schreiben, weil dadurch der Modenindex  $r$  verlorengehe). Ähnlich wie beim Grundzustand des harmonischen Oszillators ist diese Wellenfunktion eine einfache Gaußfunktion mit der Breite  $\sqrt{\hbar/m_r \omega_r}$ , analog lässt sie sich so verstehen, dass im Vakuumzustand die Feldveränderliche nicht den scharfen Wert  $q_r = 0$  annimmt, sondern

mit der Amplitude  $\delta q_r = \sqrt{\hbar/m_r\omega_r}$  fluktuiert. Entsprechend fluktuiert auch das elektrische Feld  $E_r(x)$  mit der Amplitude

$$\delta E_r(x) = -\sqrt{\frac{2m_r\omega_r^2}{\epsilon_0 V}} \sin(k_r x) \delta q_r = -\sqrt{\frac{2\hbar\omega_r}{\epsilon_0 V}} \sin(k_r x)$$

Diese Fluktuation des elektrischen Feldes ist gerade das, was man in der Quantenfeldtheorie als *Vakuumfluktuation(en)* bezeichnet: der Wert des Feldes – ob nun des elektromagnetischen Feldes, eines sonstigen bosonischen Feldes oder eine fermionischen Feldes – nimmt nicht den scharfen Wert 0 an, sondern fluktuiert mit einer gewissen Amplitude um diesen Wert. Die Energie der  $r$ -ten Mode ist entsprechend im Vakuumzustand nicht 0, sondern

$$W_{r0} = W_{n_r} |_{n_r=0} = \frac{1}{2} \hbar\omega_r > 0$$

Das ist gerade die *Vakuumenergie* der Mode. Bei anderen bosonischen Feldern tritt sie in gleicher Weise auf (bei fermionischen Feldern ist sie  $-\frac{1}{2}\hbar\omega_r$ , also negativ).

Beim elektromagnetischen Feld kann man die Vakuumfluktuation des elektrischen Feldes mit der Unschärfebeziehung zwischen  $E_r$  und  $B_r$  in Verbindung bringen: aus der folgt, dass  $E_r$  und  $B_r$  nicht gleichzeitig scharfe Werte annehmen können (außer an den Wellenknoten), und damit auch nicht den scharfen Wert 0. Für andere Felder kann man vergleichbare Unschärfebeziehungen aufstellen.

### 3.4 Der Casimir-Effekt

Kommen wir noch einmal auf die Vakuumenergie zurück. Die Energie einer einzelnen Mode im Vakuumzustand ist  $\frac{1}{2}\hbar\omega_r$ . Für die Gesamtenergie des Feldes ergibt sich dann durch Summation über alle Moden ein unendlich großer Wert:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar\omega_r = \infty$$

Das liegt daran, dass es, auch wenn ein Kasten mit einem endlichen Volumen  $V = L^3$  betrachtet wird, in dem nur bestimmte Moden zugelassen sind, unendlich viele Moden gibt. Für eine ausführliche Diskussion darüber, wie mit diesem unendlich großen Wert für die Vakuumenergie umzugehen ist, sei auf [4], Kapitel 3, verwiesen. Im folgenden soll es um einen Effekt gehen, bei dem die Vakuumenergie, auch wenn sie selbst unendlich groß ist, um einen endlichen Betrag geändert wird: den *Casimir-Effekt*. Dieser wird in [1] in Kapitel 5.5 und in [4] in Abschnitt 4 beschrieben. Da [4] frei zugänglich ist, wollen wir uns nachfolgend an dieser Quelle orientieren.

Es wird Resonator mit einer beweglichen Trennwand betrachtet (Abb. 1 in [4]), die den Resonator in zwei Kavitäten unterteilt. Die linke Kavität hat die Abmessungen  $X \times Y \times D$ , die rechte Kavität die Abmessungen  $X \times Y \times (Z - D - P)$ , wobei  $P$  die Dicke der Trennwand ist. In Gleichung (16) wird die

Vakuumentnergie in der linken Kavität durch Aufsummierung über alle in dieser Kavität zugelassenen Moden berechnet:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \hbar\omega_{lmn} \\
&= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \hbar ck_{lmn} \\
&= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \hbar c \sqrt{\left(\frac{l\pi}{D}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{X}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{Y}\right)^2} = \infty
\end{aligned}$$

Die Zahlen  $l, m, n$  nummerieren die möglichen Moden durch (wie bisher  $r$ ), wobei es zu jeder Kombination der drei Zahlen zwei Moden gibt, je eine für jede Polarisationsrichtung, wodurch auch der Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  eliminiert wird. Wie nicht anders zu erwarten, ist das Ergebnis unendlich. Um berechnen zu können, wie sich die Vakuumentnergie in beiden Kavitäten ändert, wenn die Trennwand verschoben wird – sich also  $D$  ändert – wird das Ergebnis zunächst endlich gemacht, indem jedes Glied der Summe mit einem Faktor  $\exp(-k_{lmn}/k_M)$  (17) versehen wird:

$$U_0 = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \hbar ck_{lmn} \exp(-k_{lmn}/k_M)$$

Dadurch werden die Beiträge der Moden mit  $k_{lmn} \gg k_M$  exponentiell gedämpft. Diese Vorgehensweise ähnelt dem in anderen Bereichen der Quantenfeldtheorie verbreiteten Verfahren der *Renormierung*: um die Differenz zwischen zwei unendlichen Größen zu bestimmen, macht man beide Größe erst endlich, berechnet dann die Differenz, und lässt anschließend beide Größen wieder unendlich werden, wobei die Differenz endlich bleibt.

Für die Vakuumentnergie in der linken Kavität erhält man auf diesem Wege schließlich

$$U_0 = \frac{\pi^2 \hbar c X Y}{2} \left( \frac{6 D k_M^4}{\pi^4} - \frac{1}{360 D^3} + \sum_{j=6}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \frac{(j^2 - 5j + 6)\pi^{j-4}}{k_M^{j-4} D^{j-1}} \right)$$

(32). Die Vakuumentnergie in der rechten Kavität kann man analog berechnen, indem man  $D$  durch  $Z - D - P$  ersetzt. Die Summe der Vakuumentnergien beider Kavitäten ist damit

$$\begin{aligned}
U_{0,\text{gesamt}} &= \frac{\pi^2 \hbar c X Y}{2} \left[ \frac{6(Z - P)k_M^4}{\pi^4} - \frac{1}{360(Z - D - P)^3} - \frac{1}{360D^3} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=6}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \frac{(j^2 - 5j + 6)\pi^{j-4}}{k_M^{j-4}} \left( \frac{1}{D^{j-1}} + \frac{1}{(Z - D - P)^{j-1}} \right) \right]
\end{aligned}$$

(33). Wird  $D$  kleiner, d.h. rückt die Trennwand näher an die linke Wand des Resonators, so wird diese Summe kleiner, woraus sich eine Kraft  $-dU_{0,\text{gesamt}}/dD$  ergibt, die auf die Trennwand wirkt (34). Wird der Fall angenommen, dass  $(Z - D - P)^4 \gg D^4$  (35a), was bedeutet, dass die Trennwand viel näher an der linken Wand des Resonators ist als an der rechten, und der Grenzfall  $k_M \rightarrow \infty$  (35b) betrachtet, durch den die endlich gemachte Vakuumenergie wieder unendlich wird, so ergibt sich als Formel für die *Casimir-Kraft*

$$F_{\text{Casimir}} = -\frac{dU_{0,\text{gesamt}}}{dD} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{XY}{D^4}$$

(36). Diese Kraft drückt die Trennwand zur linken Wand des Resonators.

In vielen Beschreibungen des Casimir-Effekts wird statt von einer beweglichen Trennwand in einem Resonator von zwei Metallplatten ausgegangen. Das Prinzip ist aber dasselbe: der Bereich zwischen den beiden Platten entspricht der linken Kavität, also dem Bereich zwischen der linken Wand des Resonators und der Trennwand, der freie Raum außerhalb der Platten der rechten Kavität,  $D$  entspricht somit dem Abstand zwischen den beiden Platten.

## 4 Diskussion: virtuelle Teilchen bei Vakuumfluktuationen?

Nach diesem kurzen Abriss der Quantenfeldtheorie wollen wir noch einmal auf das populärwissenschaftliche Bild des Quantenvakuums zurückkommen, laut dem ständig virtuelle Teilchen entstehen und sich dazu Energie "borgen".

Wie wir gesehen haben, fluktuiert im Vakuumzustand der Wert des jeweiligen Feldes – im Fall des elektromagnetischen Feldes die elektrische und magnetische Feldstärke  $E_r$  und  $B_r$ . Ein "Ausborgen" von Energie ist dazu nicht erforderlich, denn es steht ja die Vakuumenergie  $\frac{1}{2}\hbar\omega_r$  der jeweiligen Mode zur Verfügung. Zum Vergleich: für die Nullpunktschwingungen des harmonischen Oszillator braucht ebenfalls keine Energie "ausgeborgt" zu werden, es steht analog die Grundzustandsenergie  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  zur Verfügung. Zudem ist der Vakuumzustand ein Eigenzustand der Energie und besitzt daher einen scharfen Energiewert  $\frac{1}{2}\hbar\omega_r$ , so dass die Unschärfebeziehung zwischen Energie und Zeit gar keine Rolle spielen kann.

Ebenso sind am Vakuumzustand keine Teilchen, also Photonen, beteiligt: Photonen treten nur in Zuständen mit  $n_r > 0$  auf. Eventuell könnte man argumentieren, dass die Fluktuationen der elektrischen Feldstärke in einem gewissen Sinne als Entstehen und Verschwinden von Photonen gedeutet werden könnten – das wäre aber so, als wolle man argumentieren, dass die Nullpunktschwingungen des harmonischen Oszillators als ständiges Wechseln in einen angeregten Zustand und zurück betrachtet werden könnten, was offensichtlich keine sinnvolle Vorstellung ist. Ein Vorgang, bei dem ein Photon entsteht und wieder verschwindet, würde bedeuten, dass ein Übergang aus dem Vakuumzustand in einen Zustand  $n_r > 0$  und zurück zum Vakuumzustand stattfände, so etwas passiert im Vakuumzustand selbst jedoch nicht.

Was den Casimir-Effekt anbetrifft: in der zugehörigen Rechnung wird nur davon ausgegangen, dass jede Mode im Vakuumzustand die Energie  $\frac{1}{2}\hbar\omega_r$  bzw.  $\frac{1}{2}\hbar\omega_{lmn}$  besitzt. Nirgendwo taucht in der Rechnung etwas von virtuellen Teilchen, die auf die Trennwand treffen, auf. Dagegen könnte man noch argumentieren, dass die Rechnung zwar quantitativ zum korrekten Ergebnis führt, aber kaum qualitative Aussagen über den Mechanismus, durch den die Casimir-Kraft auf die Trennwand aufgebaut wird, macht. Dieses Argument wäre auch nicht ganz unrichtig. Wenn es aber tatsächlich eine Motivation dafür geben sollte, die Casimir-Kraft durch das Auftreten virtueller Teilchen zu erklären, dann sollte es auch eine entsprechende auf der Quantenfeldtheorie basierende Rechnung dazu geben. Eine solche gibt es jedoch nicht.

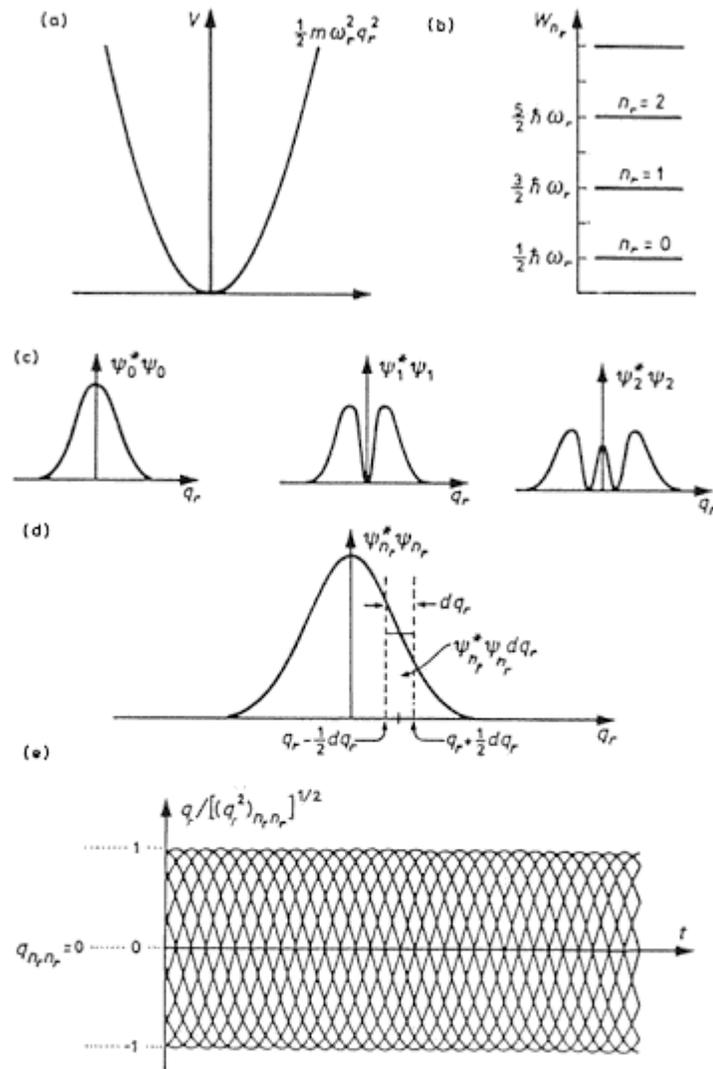
Weiterhin könnte man argumentieren, dass die in Kapitel 4.1 und 4.2 in [1] beschriebene Quantisierung nur eine Quantisierung des Strahlungsfeldes ist, nicht des gesamten elektromagnetischen Feldes. Jedoch ist es so, dass das Strahlungsfeld der einzige Anteil der Feldes ist, der dynamische Freiheitsgrade besitzt. Neben dem Strahlungsfeld gibt es noch den elektrostatischen und magnetostatischen Anteil, die jedoch sind beide vollständig durch die Ladungs- und Stromdichten bestimmt und haben daher keine dynamischen Freiheitsgrade. Entsprechend brauchen sie auch nicht quantisiert zu werden.

Es gibt allerdings auch einen Ansatz zur Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, bei dem das volle Feld quantisiert wird. Dabei wird anstelle der elektrischen und magnetischen Feldstärke das Viererpotential  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  betrachtet, d.h. es wird neben dem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  auch das Skalapotential  $\phi$  wie ein dynamischer Freiheitsgrad behandelt. Die resultierende zu hohe Anzahl an dynamischen Freiheitsgraden, die z.B. Photonen mit longitudinaler Polarisation erlauben würde, wird abschließend durch den sog. Gupta-Bleuler-Formalismus wieder reduziert, siehe z.B. [5]. Das Resultat für den Vakuumzustand bleibt aber im wesentlichen das gleiche: statt  $E_r$  wird  $A_r^\mu$  durch  $q_r$  ausgedrückt, und die Vakuumzustands-Wellenfunktion  $u_{r0}$  beschreibt statt Fluktuationen der elektrischen Feldstärke Fluktuationen des Viererpotentials, aus der sich dann aber auch wieder Fluktuationen der elektrischen und magnetischen Feldstärke ergeben.

Nachdem wir nun die Unterschiede zwischen den Darstellungen in populärwissenschaftlichen Quellen und denen in Lehrbüchern der Quantenfeldtheorie herausgestellt haben, soll abschließend noch auf die naheliegende Frage eingegangen werden, wie solche populärwissenschaftlichen Darstellungen dann eigentlich angekommen sind. Die Ursache hierfür liegt wahrscheinlich beim *Lamb-Shift*. In dessen Feynman-Diagramm (siehe z.B. [6], das linke Diagramm) tritt neben dem virtuellen Photon, das die elektrostatische Anziehung zwischen dem Proton und Elektron im Wasserstoff-Atom vermittelt, ein zweites virtuelle Photons auf, das mit der Selbstenergie des Elektrons zusammenhängt. Zugleich spielen für den Lamb-Shift die Vakuumfluktuationen des elektromagnetischen Feldes eine Rolle. Nun kann man den Lamb-Shift einmal korrekt mit den Mitteln der S-Matrix-Theorie berechnen. Zu einem quantitativ fast richtigen Ergebnis kann man aber auch gelangen, wenn man von der Modellvorstellung ausgeht, dass das für die Selbstenergie verantwortliche zweite virtuelle Photon für einen Zeit-

raum von  $\tau = \hbar/E$  existieren dürfe, und man dieses als Vakuumfluktuation des elektromagnetischen Feldes verstehen könne. Diese vereinfachte Berechnung des Lamb-Shift haben dann vermutlich die Autoren populärwissenschaftlicher Literatur für sich entdeckt.

A Bild 4.1 aus [1]



**Bild 4.1** Der harmonische Oszillator in der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes. Die Abhängigkeit der „potentiellen Energie“ von der Feldveränderlichen (a) und die Energie (b) und die Wahrscheinlichkeitsdichte (c) für den Grundzustand und die beiden nächsten angeregten Zustände. Die Wahrscheinlichkeit, daß man die Feldveränderliche  $q_r$  auf dem Intervall zwischen  $q_r - \frac{1}{2}dq_r$  und  $q_r + \frac{1}{2}dq_r$  antrifft, wird von  $\Psi_{n_r}^* \Psi_{n_r} dq_r$  bestimmt (d). Die Zeitabhängigkeit der Feldveränderlichen kann man angeben. Da die Phase völlig unbekannt ist, kann man sich lediglich die Gesamtheit der Schwingungen mit der klassischen Kreisfrequenz  $\omega_r$  vorstellen, ohne daß man eine Schwingung unter ihnen auszeichnen könnte (e). Die Feldstärken  $E_r$  und  $B_r$  werden durch die Feldveränderliche  $q_r$  bestimmt. Vergleiche mit Bild 2.1.

## Literatur

- [1] Wilfried Kuhn, Janez Strnad: *Quantenfeldtheorie - Photonen und ihre Deutung*, Vieweg+Teubner (1995), ISBN 978-3-322-90949-7
- [2] Franz Schwabl: *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)*, Springer Lehrbuch, ISBN 978-3-540-85076-2
- [3] [https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer\\_Oszillator\\_\(Quantenmechanik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik))
- [4] <http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd08011.pdf>
- [5] <https://de.wikipedia.org/wiki/Gupta-Bleuler-Formalismus>
- [6] <http://hydrogen.physik.uni-wuppertal.de/hyperphysics/hyperphysics/hbase/quantum/lamb.html>